Семинар отдела динамических систем, среда, 12 ноября 2014 г., 15.00

Изучение семейств непрерывных одномерных отображений с отношением линейной сопряжённости

В.А. Густомесов (РГППУ)

1. В предыдущем докладе (март 2014 г.) описана процедура выделения циклов с наименьшим периодом k (k-циклов) в семействах отображений, названных в заголовке.Тип k-цикла определяется циклической подстановкой π k-го порядка. Введено понятие *блока* циклических подстановок k-го порядка как пары $\Pi = \{\pi, \bar{\pi}\}$, где $\bar{\pi}$ — симметричная к π подстановка. Блок k-циклов является инвариантом отношения линейной сопряжённости. Изучена структура множества T_k циклических подстановок k-го порядка, выявлены связи между циклическими подстановками $\pi, \bar{\pi}, \pi^{-1}$. Для более глубокой классификации соответствующих k-циклов отображений выбранного класса эквивалентности, учитывающей и расстояния между точками, введено понятие *нормированного* k-цикла. Это — один из соответствующих k-циклов рассматриваемого типа, двумя соседними точками которого являются $1, 0$. Остальные точки нормированного цикла (метки) вполне характеризуют цикл. Указаны формулы изменения меток при переходе к симметричной циклической подстановке.

2. Важным классом семейств отображений с отношением линейной сопряжённости являются семейства A_m многочленов степени $m > 1$. Изучены некоторые свойства полиномиальных отображений.

n-я итерация многочлена $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + ... + a^*x + b^*$ — многочлен степени m^n

$$f_n(x) = a_n\, x^{m^n} + b_n\, x^{m^n-1} + \ldots + a_n^*\, x + b_n^*,$$

где

$$a_n = a^{\frac{m^n-1}{m-1}},\ b_n = m^{n-1} a^{\frac{m^n-m}{m-1}} b,\ a_n^* = f_n'(0),\ b_n^* = f_n(0).$$

Выявлены особенности полиномиальных отображений чётной и нечётной степени m. При чётных m достаточно изучать лишь отображения со старшим коэффициентом a одного знака. Дело в том, что каждому решению отображения $f(x) = ax^m + ...$, исходящему из точки x, сопоставляется решение, исходящее из точки $-x$, отображения $\hat{f}(x) = -ax^m + ...$ Переход от f к $\hat{f}$ происходит посредством сопрягающей функции $h(x) = -x$. Если же m — нечётное число, то линейно сопряжённые полиномиальные отображения имеют одинаковые знаки a и многочлены с различными знаками имеют разные свойства. Выяснено, что отображения семейства A_m содержат k-циклы всех возможных типов $\pi \in T_k$ при $k \leqslant m + 1$.

3. Более детально изучены квадратичные отображения $A_2 = \{ax^2 + bx + c \,|a \neq 0\}$. В литературе, в основном, рассматриваются различные однопараметрические семейства квадратичных отображений, напр., $\lambda x(1 - x)$, $-x^2 + c$. Здесь сделана попытка описания некоторых свойств всего семейства A_2.

Отображения $f \in A_2$ линейно сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое значение существенного параметра $u = (b - 1)^2 - 4ac$.

Квадратичное отображение — унимодальная функция с одной точкой экстремума $x_e = -b/(2a)$, симметричная относительно x_e. Её удобно преобразовать к виду $f(x) = a\,(x - x_e)^2 + x_e - (u - 1)/(4a)$.

При $u < 0$ все решения отображений $f \in A_2$ неограничены. С ростом параметра $u \in [0, 9]$ общая картина решений усложняется, появляются новые циклы, поначалу устойчивые. Выделены инвариантные отрезки, содержащие все (или почти все) ограниченные решения. Подробно описаны k-циклы для $1 \leqslant k \leqslant 3$. При изучении 3-циклов применена процедура перехода к нормированным циклам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1986. — 280 с.

2. Gustomesov V. A. Description of cycles for quadratic maps from the position of the linear conjugasy: сб. тезисов международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы». Н.-Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2013. — С. 53-54.