Семинар Отдела динамических систем,
21 декабря 2022 г., $15^{\underline{00}}$

Многомерное неравенство Гаусса

Бедин Д.А.

Неравенство Гаусса является усилением неравенства Чебышёва для унимодальных распределений. Пусть X — одномерная случайная величина с модой ν и $\tau^2 = \mathbf{E}\{(X-\nu)^2\}$, тогда

$$\mathbf{P}\{|X-\nu| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \begin{cases} 1 - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}\tau}, & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{2\tau}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{4\tau^2}{9\varepsilon^2}, & \varepsilon \geqslant \dfrac{2\tau}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Одним из самых естественных обобщений понятия унимодальности на $\mathbb{R}^n$ является звёздная унимодальность [1, 2]. В литературе [1, 3] известно обобщение неравенства Гаусса для звёздных унимодальных случайных величин $\mathcal{P}_\star(\mu, \Sigma)$ из $\mathbb{R}^n$ с заданным матожиданием μ и матрицей ковариации Σ для случая, когда мода ν совпадает с μ:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\|X-\nu\|}{\sqrt{\operatorname{tr}\{\Sigma\}}} \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} \varepsilon^n, & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \left(\dfrac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\dfrac{2}{n+2}\right)^{\frac{2}{n}} \dfrac{1}{\varepsilon^2}, & \varepsilon \geqslant \left(\dfrac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Автор сообщения предлагает другое, более «прямое» доказательство этого неравенства, которое основывается на идеях доказательства одномерного неравенства Гаусса из [4]. В новом доказательстве не требуется совпадения моды ν с математическим ожиданием μ, кроме того доказано, что неравенство является точным.

Список литературы

[1] *Van Parys, B.P.G., Goulart, P.J., Kuhn, D.* Generalized Gauss inequalities via semidefinite programming. Math. Program., 2016, 156, 271–302.

[2] *Dharmadhikari, S., Joag-Dev, K.* Unimodality, Convexity, and Applications, Probability and Mathematical Statistics, vol. 27. Academic Press. 1988.

[3] *Bartolomeo Stellato.* Data-driven chance constrained optimization. Master thesis. Automatic control laboratory, ETH, September 2014.

[4] *Friedrich Pukelsheim.* The Three Sigma Rule. The American Statistician, 1994, 48:2, P. 88–91.